Systematische Kurvendiskussion

R. Knipschild ∘ Pf. 1468 ∘ D-34484 Korbach

Sommersemester 2012

1 Metadaten-Bestimmung

Es wird der natürliche **Definitionsbereich** D_f bestimmt.
Beispiel: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (definiert für alle rellen Zahlen außer 0)

Es wird festgestellt, ob die Funktion **stetig** ist und bspw. im Falle einer gebrochen-rationalen Funktion beliebig **differenzierbar** ist.

2 Ableitungen

Es werden die (ersten drei) Ableitungen der Funktion gebildet.

Beispiel:
$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^3 + 4x + 20 \\ f^{(1)}(x) &= 3x^2 + 4 \\ f^{(2)}(x) &= 6x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned}$$

3 Werte

Es sollte untersucht werden, wie sich die Funktion in Extremsituationen verhält. In unserem Definitionsbereich-Beispiel von oben würde das heißen, dass man untersucht, wie sich die Werte bei gegen $\pm\infty$ verhalten, sowie bei $\to 0$.

4 Nullstellen von f

Die Nullstellen werden einfach bestimmt, indem die Funktion $f(x)$ gleich 0 gesetzt wird, hier ein einfaches Beispiel:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 9x + 4 & &\mid \div 3 \\ 0 &= x^2 + 3x + 1\tfrac{1}{3} & &\mid p.q.{}^{p=3}_{q=1\frac{1}{3}} \\ x_{1,2} &= -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{3}{2})^2 - 1\tfrac{1}{3})} \end{aligned}$$

5 Extrema/Extremwerte

Bedingung für ein Extremum ist, dass das Extrem-x x_E in die erste Ableitung eingesetzt zu $f'(x_E) = 0$ führt. Das ist die **notwendige Bedingung**. Ob es sich wirklich um Extremstellen handelt, muss dann jedoch noch dadurch geprüft werden, dass man schaut

1. ob die entsprechenden Werte im Definitionsbereich liegen und
2. ob die entsprechenden Werte einem Maximum oder einem Minimum entsprechen: $f''(x_E) < 0 \rightarrow$ MAXIMUM; $f''(x_E) > 0 \rightarrow$ MINIMUM.

Wenn nicht nur die Werte, sondern auch die Punkte ausgerechnet werden sollen, kann dies ganz einfach durch Einsetzen in die $f^{(0)}$-Funktion gemacht werden. Wichtig: Wenn $f''(x_E) = 0$ ist, kann keine Aussage über die Art des Extrems gemacht werden.

Wenn $f'''(x_E) \neq 0$ ist, dann liegt keine Extremstelle, sondern eine Sattelstelle vor.

6 Wendestellen/Wendepunkte

Die notwendige Bedingung zum Vorliegen einer Wendestelle an der Stelle x_W ist $f''(x_W) = 0$. Die entsprechende Ableitung wird also mit null gleichgesetzt und die Stellen, die am Ende herauskommen, müssen im Definitionsbereich liegen (hinreichende Bed.), dann sind es die Wendestellen. Zur Berechnung entsprechener Punkte sind diese wieder in die Originalfunktion einzusetzen.

7 Monotonie/Krümmung

Aufgrund der Erkenntnisse aus Abschnitt fünf und sechs wird der Graph in Sektionen eingeteilt, über die Aussagen bezüglich monotonem Steigen/Fallen getroffen werden kann.

Ebenso wird bezüglich der Krümmung verfahren: Entsprechend der Erkenntnisse kann beurteilt werden, wie die Krümmung ist: Für $f''(x) \leq 0$ unter der Bedingung das x aus dem zu betrachtenden Intervall ist, ist der Graph in diesem Intervall rechtsgekrümmt. Bei $f''(x) \geq 0$ wäre er linksgekrümmt.